Master 1 Physique et Astrophysique Parcours Astrophysique et Techniques Spatiales

TD Physique nucléaire 2015-2016

TD 2
Application du gaz de Fermi à l'astrophysique

Etude d'une étoile à neutrons

On considère une étoile à neutrons sphérique, de rayon R, de volume V et de masse M. On néglige les effets de surface, ce qui revient à assimiler l'étoile à un morceau de matière nucléaire composé de neutrons en nombre N. Les neutrons individuels sont décrits par des ondes planes normalisées à V selon $\Psi_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_i.\vec{r}_i}$.

1 – Ecrire la relation entre le moment de Fermi k_F et le rayon de l'étoile, en statistique de Fermi-Dirac à 0°K.
Pour cela, on supposera que chaque état quantique de l'espace des états réels des particules occupe dans l'espace des phases un volume de h^3, et qu'il ne peut y avoir plus de deux neutrons par état, et pour évaluer l'ordre de grandeur du produit $k_F R$, on considèrera une étoile d'une masse solaire. On rappelle que $1M^* = 2\ 10^{33}$ g et que la masse du neutron vaut $m_n \approx 1{,}67\ 10^{-27}$ kg.

2 – Sachant que la température typique d'une étoile à neutrons est de $T = 10^6$ à 10^7 K, doit-on tenir compte de la température dans les calculs sur le gaz de fermi ? On prendra $R = 10$ km. On rappelle la valeur de la constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38\ 10^{-23}$ J K^{-1}.

3 – Exprimer l'énergie cinétique moyenne $<T>$ de l'étoile, et la calculer. On rappelle la valeur de la constante de Planck réduite $\hbar = 1{,}055\ 10^{-34}$ J s.

4 – Exprimer l'énergie d'interaction gravitationnelle moyenne $<V_g(1,2)>$ entre deux neutrons et en déduire l'énergie gravitationnelle totale $<V_g>$ de l'étoile. On donne

$$\frac{1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\omega), \text{ avec } r_< = \inf(r_1, r_2),\ \ r_> = \sup(r_1, r_2),\ \ \omega = \left(\overbrace{r_1, r_2}\right),$$

$$P_l(\cos\omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{-l}^{+l} Y_{l,m}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{l,m}(\theta_2, \varphi_2) \text{ et } \int_{4\pi} Y_{l,m} d\Omega = \sqrt{4\pi}\,\delta_{l,0}\delta_{m,0}.$$

Calculer $<V_g>$ sachant que la constante de gravitation vaut $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}.

5 – Déterminer le rayon d'équilibre de l'étoile en supposant que l'interaction nucléaire est négligeable. Exprimer l'énergie ε correspondante et calculer le rapport ε / N.

6 – Comparer la densité d'équilibre de l'étoile à la densité des neutrons au centre des noyaux lourds ; prendre comme exemple le plomb $^{208}_{82}Pb$. On rappelle la valeur du rayon nucléaire unité, soit $r_0 = 1{,}2$ fm.

7 – En utilisant le formule de Weizsäcker :

$$E(N,Z) = -b_{vol}(N+Z) + b_{surf}(N+Z)^{2/3} + \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{R} + \frac{1}{2} b_{sym} \frac{(N-Z)^2}{(N+Z)},$$

étudier la stabilité d'un très grand système composé uniquement de neutrons sachant que $b_{vol} \approx 15{,}6$ MeV et $b_{sym} = \approx 47{,}2$ MeV.

8 – On considère une force de portée nulle (potentiel en $-\delta(r_{12})$)

a – Montrer que l'énergie d'interaction nucléaire est de la forme – K'' / R^3.

b – Quel est alors le rayon d'équilibre de l'étoile ?